B A D A N I A   O P E R A C Y J N E   I   D E C Y Z J E

Nr 3–4 2005

Zbigniew ŚWITALSKI*

OPTYMALNY SYSTEM REKRUTACJI KANDYDATÓW DO SZKÓŁ

Przedstawiono uogólnienie algorytmu Gale'a–Shapleya, wyznaczającego optymalny sposób rekrutacji do szkół [4] na przypadek, gdy preferencje szkół są określone za pomocą tzw. funkcji odrzuceń. Sformułowano warunki (addytywności, niezależności i asymetrii), przy których uogólniony algorytm G–S prowadzi do rozwiązań stabilnych i optymalnych.

Słowa kluczowe: *system rekrutacji, dwustronne zagadnienie skojarzenia, algorytm Gale'a–Shapleya*

1. Wstęp

Problemy związane z organizacją i funkcjonowaniem systemu rekrutacji kandydatów do szkół średnich, które ujawniły się w Polsce w latach 2000 i 2002[1] skłaniają do zastanowienia się nad problemem „optymalnego" funkcjonowania tego rodzaju systemów. Dobry system rekrutacji powinien, z jednej strony, w jak największym stopniu uwzględniać preferencje kandydatów (każdy kandydat chciałby się dostać do

* Katedra Badań Operacyjnych, Akademia Ekonomiczna, al. Niepodległości 10, 60-967 Poznań. zbigniew.switalski@ae.poznan.pl

[1] W roku 2000 wprowadzono w Polsce system rekrutacji do szkół średnich, oparty na zewnętrznych testach kompetencji. Każdy kandydat mógł składać podanie tylko do jednej szkoły. W wyniku tego wielu kandydatów, którzy nie dostali się do „dobrych" szkół zostało „na lodzie", gdyż pozostały dla nich tylko „najgorsze" szkoły, zupełnie nieodpowiadające ich aspiracjom (zob. [5]). W roku 2002 kandydaci mogli składać podania do dowolnej liczby szkół. Oczywiście w pierwszej turze rekrutacji większość miejsc we wszystkich szkołach zajęli najlepsi kandydaci (którzy znaleźli się na wielu listach), a pozostali (była ich zdecydowana większość) musieli się zadowolić miejscami na listach rezerwowych. Nastąpił nerwowy okres oczekiwania na zwolnienie się miejsc, zablokowanych przez najlepszych kandydatów i możliwość przejścia z listy rezerwowej na listę „właściwą". Dopiero od 2003 roku rozpoczęto wprowadzanie na szerszą skalę systemów komputerowych, które likwidowały tego rodzaju patologie.

jak najlepszej, ze swojego punktu widzenia, szkoły), a z drugiej – preferencje szkół (każda szkoła chciałaby mieć jak najlepszych kandydatów). Problem jest więc ze swojej natury wielokryterialny i jako taki – trudny do jednoznacznego rozwiązania. Okazuje się jednak, że przy uwzględnieniu pewnego warunku sprawiedliwości (wymagającego, aby „dobrzy” kandydaci mieli większe szanse na dostanie się do „dobrych” szkół niż kandydaci „gorsi”) istnieje jednoznaczne rozwiązanie tego problemu.

Zostało to po raz pierwszy udowodnione przez Gale'a i Shapleya w pracy z 1962 roku [4]. Gale i Shapley sformalizowali warunek sprawiedliwości, który nazwali warunkiem stabilności i udowodnili, że wśród rozwiązań stabilnych (rozwiązaniem nazywamy przydział kandydatów do szkół) istnieje dokładnie jedno rozwiązanie optymalne – przy czym przez optymalność rozumiemy tutaj Pareto-optymalność, ale uwzględniającą tylko preferencje kandydatów (preferencje szkół są pośrednio uwzględnione w warunku stabilności).

Gale i Shapley zakładali, że preferencje szkół są ostrymi liniowymi porządkami (tzn. że każda szkoła jest w stanie jednoznacznie określić, który z dwóch kandydatów jest lepszy, a który gorszy) oraz że szkoły mają sztywne limity przyjęć (liczba przyjętych kandydatów nie może przekraczać ustalonego z góry limitu q). W praktyce jednak (np. podczas rekrutacji do szkół średnich w Polsce) stosuje się najczęściej punktację osiągnięć kandydatów. Wielu kandydatów otrzymuje w tej sytuacji tę samą liczbę punktów, a więc są oni przez daną szkołę „nierozróżnialni”. Również limity przyjęć mogą mieć charakter „miękki”. Jeśli na przykład na końcu listy przyjętych miałoby się znaleźć wielu kandydatów z tą samą liczbą punktów, to często szkoła jest gotowa „nieco” zwiększyć limit q, tak aby wszyscy kandydaci z „graniczną” liczbą punktów mogli zostać przyjęci.

Mimo ogromnej liczby prac poświęconych różnym zastosowaniom i uogólnieniom metody Gale'a–Shapleya (w skrócie: metody G–S), na ogół nie uwzględnia się w tych pracach nierozróżnialności kandydatów i miękkich limitów (jednym z niewielu wyjątków jest praca [3], daleko idące uogólnienie metody G–S zostało podane w pracy [1]).

W artykule przedstawiamy uogólnienie metody Gale'a–Shapleya na przypadek, gdy preferencje i limity szkół są określone w bardzo ogólny sposób. Zakładamy mianowicie, że dla każdej szkoły jest określona tzw. funkcja odrzuceń, która każdemu zbiorowi kandydatów L przyporządkowuje zbiór kandydatów odrzuconych ze zbioru L – oznaczany symbolem $O(L)$. Jeśli więc L jest zbiorem kandydatów, którzy zgłosili się do tej szkoły, to szkoła gotowa jest przyjąć kandydatów ze zbioru $L\backslash O(L)$, nie przyjmuje natomiast kandydatów ze zbioru $O(L)$. Takie podejście umożliwia uwzględnienie zarówno tradycyjnych kryteriów porządkowych (wówczas np. $O(L)$ składa się ze wszystkich kandydatów oprócz q najlepszych), jak i wszelkich innych metod, za pomocą których szkoły mogą tworzyć listy przyjętych – szczególnie metod uwzględniających nierozróżnialność kandydatów i „miękkie” limity.

Wprowadzenie ogólnych funkcji odrzuceń wymaga odpowiedniego sformułowania warunku stabilności, a także warunków, które muszą być nałożone na funkcje

$O(L)$ i które będą gwarantowały istnienie rozwiązań stabilnych i optymalnych. Warunki te (niezależność, addytywność i asymetria) formułujemy w punkcie 2. pracy. W punkcie 3. definiujemy rozwiązania stabilne i optymalne dla uogólnionych modeli G–S, a w punkcie 4. udowadniamy twierdzenie o istnieniu takich rozwiązań dla uogólnionego algorytmu G–S.

2. Formalny model systemu rekrutacji

Model, który przedstawiamy może obejmować zagadnienia rekrutacji kandydatów do szkół, pracowników do firm, kojarzenie małżeństw, kojarzenie firm itp. Od strony formalnej mamy tutaj do czynienia z tzw. dwustronnym zagadnieniem skojarzenia (*two – sided matching problem).* W pracy ograniczamy się jednak (bez zmniejszania ogólności) do języka i problematyki rekrutacji kandydatów do szkół (podobnie jak w pracach [2], [4]).

Zakładamy, że dany jest skończony i niepusty zbiór kandydatów $K = \{k_1, k_2, ..., k_n\}$ oraz skończony i niepusty zbiór szkół $S = \{s_0, s_1, s_2, ..., s_m\}$. Każdy kandydat chciałby zostać przyjęty do dokładnie jednej szkoły. Każda szkoła gotowa jest przyjąć pewną liczbę kandydatów (nie musi być ona z góry ustalona). Szkoły interpretujemy w sposób możliwie ogólny – mogą to być też np. klasy o określonym profilu w poszczególnych szkołach, do których prowadzona jest osobna rekrutacja. Szkoła s_0 interpretowana jest jako szkoła fikcyjna przyjmująca wszystkich kandydatów, którzy nie dostali się do innych szkół (z powodu braku miejsc). Dla każdego kandydata $k_i \in K$ określamy niepusty zbiór szkół przez niego akceptowanych $S(k_i) \subset S$. Kandydat k_i gotowy jest podjąć naukę w jednej ze szkół ze zbioru $S(k_i)$ i nie chciałby się uczyć w żadnej szkole spoza zbioru $S(k_i)$. Zakładamy, że $s_0 \in S(k_i)$ i że $S(k_i)$ zawiera przynajmniej jedną szkołę oprócz s_0. Symbolem $P(k_i)$ oznaczamy preferencje kandydata k_i w zbiorze $S(k_i)$. Zakładamy, że $P(k_i)$ jest ostrym liniowym porządkiem, tzn. że dla dowolnych dwóch szkół s_j, s_k kandydat k_i jest w stanie określić, która z nich jest (dla niego) lepsza, a która gorsza. Zapis

$$k_i : s_{j_1} s_{j_2} ... s_{j_p} s_0$$

będzie oznaczał, że kandydatowi k_i najbardziej odpowiada szkoła s_{j_1}, następnie s_{j_2} itd. Ciąg $s_{j_1} s_{j_2} ... s_{j_p} s_0$ będziemy nazywać listą preferencji kandydata k_i (zakładamy, że szkoła s_0 znajduje się na końcu każdej listy preferencji).

Preferencje szkoły j-tej $(j = 0, 1, ..., m)$ przedstawimy za pomocą tzw. funkcji odrzuceń, tzn. funkcji

$$O_j : \Pi(K) \to \Pi(K),$$

($\Pi(K)$ jest zbiorem wszystkich podzbiorów zbioru K), spełniającej warunek $O_j(L) \subset L$ dla dowolnego $L \subset K$. Zbiór $O_j(L)$ interpretujemy jako zbiór kandydatów, których szkoła s_j odrzuci, jeśli zbiór kandydatów, którzy się do niej zgłosili jest równy L.

Na funkcję O_j będziemy nakładali różne warunki, które będą wykorzystywane w dalszej części pracy. Zakładamy po pierwsze, że dla dowolnego $L \subset K$, $O_0(L) = \varnothing$. Oznacza to, że szkoła s_0 zawsze przyjmuje wszystkich kandydatów, którzy się do niej zgłoszą. Następne warunki przedstawimy za pomocą kolejnych definicji.

Definicja 1. Mówimy, że funkcja O_j spełnia warunek *monotoniczności*, jeśli dla dowolnych zbiorów $L, M \subset K$ zachodzi

$$L \subset M \;\Rightarrow\; O_j(L) \subset O_j(M). \tag{1}$$

Monotoniczność oznacza, że każdy kandydat odrzucony z „mniejszego" zbioru kandydatów musi być również odrzucony z „większego" zbioru.

Definicja 2. Funkcja O_j spełnia warunek *addytywności*, jeśli dla dowolnych $L, M \subset K$ zachodzi

$$L \setminus O_j(L) \subset M \;\Rightarrow\; O_j(L \cup M) = O_j(L) \cup O_j(M). \tag{2}$$

Funkcja O_j jest więc addytywna, jeśli spełniony jest warunek z prawej strony implikacji (2), ale tylko dla takich zbiorów L, M, że zbiór M zawiera zbiór wszystkich kandydatów przyjętych ze zbioru L. Zauważmy, że warunek addytywności jest silniejszy od warunku monotoniczności, tzn. z (2) wynika (1). Jeśli bowiem $L \subset M$, to $L \setminus O_j(L) \subset M$ oraz $L \cup M = M$, a więc z warunku (2) otrzymujemy

$$O_j(L \cup M) = O_j(M) = O_j(L) \cup O_j(M),$$

skąd $O_j(L) \subset O_j(M)$.

Definicja 3. Funkcja O_j spełnia warunek *niezależności*, jeśli dla dowolnych $L, M \subset K$ zachodzi

$$M \subset O_j(L) \;\Rightarrow\; O_j(L) \setminus M \subset O_j(L \setminus M). \tag{3}$$

Warunek niezależności oznacza, że kandydaci odrzucani ze zbioru L, którzy nie należą do zbioru M, są również odrzucani ze zbioru $L \setminus M$. Innymi słowy to, czy kandydat (spoza zbioru *M*) będzie odrzucony ze zbioru *L* czy nie, nie zależy od tego, czy uwzględniamy zbiór *M*, czy nie. Zauważmy, że z warunku monotoniczności wynika silniejsza postać warunku niezależności, a mianowicie:

$$M \subset O_j(L) \;\Rightarrow\; O_j(L) \setminus M = O_j(L \setminus M)\,. \tag{4}$$

Z monotoniczności wynika bowiem $O_j(L \setminus M) \subset O_j(L)$. Ponieważ jednak $O_j(L \setminus M) \subset L \setminus M$ (z definicji funkcji O_j), ostatecznie więc otrzymujemy

$$O_j(L \setminus M) \subset O_j(L) \setminus M,$$

czyli zawieranie przeciwne do zawierania z prawej strony implikacji (3).

W celu określenia następnego warunku zdefiniujemy teraz pewną relację w zbiorze kandydatów (związaną z funkcją O_j).

Definicja 4. Niech $k_i, k_l \in K$. Relacją preferencji $>_j$ związaną z funkcją O_j nazywamy relację w zbiorze *K*, określoną następująco:

$$k_i >_j k_l \;\Leftrightarrow\; \exists_{L \subset K} : k_i \in L \wedge k_i \notin O_j(L) \wedge k_l \in O_j(L)\,.$$

Relacja $k_i >_j k_l$ oznacza, że istnieje zbiór kandydatów *L* taki, że szkoła s_j gotowa jest przyjąć kandydata k_i ze zbioru *L* i jednocześnie odrzuca kandydata k_l z tego samego zbioru. Można więc powiedzieć, że w pewnym sensie kandydat k_i okazał się lepszy od kandydata k_l (przynajmniej ze względu na zbiór *L*).

Definicja 5. Funkcja O_j spełnia warunek *asymetrii*, jeśli relacja $>_j$ jest asymetryczna w zbiorze *K*.

Warunek asymetrii oznacza, że dla dowolnych $k_i, k_l \in K$

$$k_i >_j k_l \;\Rightarrow\; \sim\; (k_l >_j k_i)\,.$$

Innymi słowy, jeśli z jakiegoś zbioru *L* szkoła s_j wybiera kandydata k_i i odrzuca kandydata k_l, to nie może być tak, że z jakiegoś innego zbioru ta sama szkoła wybiera kandydata k_l i odrzuca kandydata k_i.

Przedstawimy teraz dwa najbardziej typowe przykłady funkcji odrzuceń.

1. Sztywne limity przyjęć (podobnie jak w modelu Gale'a–Shapleya [4])

Szkoła s_j posiada limit przyjęć równy q_j. Wszyscy kandydaci są uporządkowani zgodnie z punktacją wyznaczoną na podstawie testów i ocen na świadectwie. Jeśli dwaj kandydaci otrzymali tę samą liczbę punktów, to szkoła stosuje dodatkowe kryteria w taki sposób, aby rozróżnić tych kandydatów (tzn. aby móc stwierdzić, który z nich jest lepszy, a który gorszy). W zbiorze *K* i w każdym jego podzbiorze jest więc określony ostry liniowy porządek. Jeśli $L \subset K$, to określamy $O_j(L)$ jako podzbiór zbioru *L* złożony z tych wszystkich kandydatów, którzy są gorsi od q_j najlepszych kandydatów (a jeśli L zawiera $\leq q_j$ kandydatów, to $O_j(L) = \varnothing$). Łatwo udowodnić, że tak określona funkcja odrzuceń spełnia warunki addytywności, niezależności i asymetrii.

2. Miękkie limity przyjęć

Szkoła s_j określa limit q_j, ale w tym przypadku jest on traktowany „miękko". Brane są pod uwagę tylko punkty z testów i ocen na świadectwie. Niektórzy kandydaci mogą więc mieć tę samą liczbę punktów. Niech $J_1, J_2, ..., J_p$ będą klasami równoważności w zbiorze kandydatów L (tzn. dwaj kandydaci są w tej samej klasie, jeśli mają tę samą liczbę punktów; zakładamy, że jeśli $i < j$, to kandydaci z klasy J_i mają więcej punktów niż kandydaci z klasy J_j). Niech t będzie najmniejszą liczbą (w zbiorze $\{1, 2, ..., p\}$) taką, że

$$\left|J_1 \cup J_2 \cup ... \cup J_t\right| \geq q_j$$

($\left|A\right|$ oznacza liczbę elementów zbioru A, zakładamy tutaj, że $|L| \geq q_j$).

Definiujemy wówczas:

$$O_j(L) = \varnothing, \text{ jeśli } |L| < q_j$$

oraz

$$O_j(L) = J_{t+1} \cup J_{t+2} \cup ... \cup J_p, \quad \text{jeśli } |L| < q_j.$$

Szkoła s_j przyjmuje więc taką liczbę kandydatów, która w możliwie najmniejszym stopniu przekracza limit q_j, przy czym musi być spełniony warunek, że jeśli jakiś kandydat zostaje przyjęty, to również zostaje przyjęty każdy inny kandydat z tą samą (lub większą) liczbą punktów. W tym przypadku można również udowodnić, że funkcja O_j spełnia warunki addytywności, niezależności i asymetrii.

3. Optymalny przydział kandydatów

Załóżmy, że dany jest zbiór kandydatów K, zbiór szkół S, preferencje kandydatów $P(k_i)$ oraz funkcje odrzuceń O_j. Niech $P = \{P(k_i)\}$ $(i = 1, 2, ..., n)$ będzie zbiorem wszystkich relacji preferencji, $O = \{O_j\}$ $(j = 1, 2, ..., m)$ zbiorem wszystkich funkcji odrzuceń. Czwórkę (K, S, P, O) będziemy nazywali sytuacją rekrutacyjną.

Definicja 6. Przydziałem kandydatów do szkół w sytuacji (K, S, P, O) nazywamy funkcję $f : K \to S$ taką, że dla dowolnego kandydata k_i i dowolnej szkoły s_j spełnione są warunki:

$$f(k_i) \in S(k_i), \quad O_j(f^{-1}(s_j)) = \varnothing.$$

Zdefiniowanie przydziału oznacza więc, że każdy kandydat k_i znalazł się w akceptowanej przez siebie szkole (warunek pierwszy). Warunek drugi oznacza, że wszyscy kandydaci, którzy znaleźli się w szkole s_j są akceptowani przez tę szkołę (żaden z nich nie jest odrzucony przez szkołę s_j).

Wśród wszystkich przydziałów będziemy poszukiwać przydziałów sprawiedliwych i optymalnych. Nieformalnie sprawiedliwość oznacza, że kandydat, który z punktu widzenia danej szkoły jest lepszy (np. otrzymał więcej punktów) od drugiego, powinien mieć większą szansę na dostanie się do tej szkoły. Gale i Shapley zdefiniowali jako warunek sprawiedliwości tzw. warunek stabilności. W terminach funkcji odrzuceń warunek ten można zdefiniować następująco:

Definicja 7. Przydział $f: K \to S$ jest stabilny, jeśli nie istnieją kandydaci $k_i, k_l \in K$ oraz szkoły $s_j, s_p \in S$ takie, że:

1) k_i znalazł się w s_j, tzn. $f(k_i) = s_j$,

2) k_l znalazł się w s_p, tzn. $f(k_l) = s_p$,

3) k_l woli s_j od s_p, tzn. $s_j P(k_l) s_p$,

4) $\sim (k_i >_j k_l)$.

Warunek 4) oznacza, że nie znajdzie się zbiór $L \subset K$ taki, że $k_i \in L$ jest przyjmowany przez szkołę s_j, a $k_l \in L$ jest odrzucany przez tę szkołę. Innymi słowy, w każdym zbiorze L, jeśli k_i jest przyjmowany przez szkołę s_j, to również k_l jest przyjmowany przez tę szkołę. Spełnienie warunków 1–4 oznacza niestabilność systemu rekrutacji. Jest to bowiem sytuacja, w której kandydat k_l wolałby znaleźć się w szkole s_j niż w szkole s_p, w której się znalazł, a z kolei szkoła s_j, która przyjęła k_i gotowa byłaby również przyjąć k_l (co wynika z warunku 4)). Można powiedzieć, że szkoła s_j i kandydat k_l są gotowi do „skojarzenia", ale funkcja f blokuje to skojarzenie. Sytuację taką można interpretować jako niesprawiedliwość systemu rekrutacji (przy punktowaniu kandydatów kandydat k_l miałby w szkole s_j co najmniej tyle samo punktów co k_i).

Zauważmy, że w podanym modelu przydziały stabilne zawsze istnieją. Przydziałem takim jest na przykład umieszczenie wszystkich kandydatów w szkole fikcyjnej s_0. Wśród przydziałów stabilnych (których może być bardzo dużo) będziemy teraz poszukiwać przydziałów optymalnych. Najpierw musimy umieć odróżniać przydziały lepsze od gorszych. Przydziały będziemy porównywać biorąc pod uwagę tylko preferencje kandydatów. Podobnie jak Gale i Shapley uznajemy bowiem, że preferencje kandydatów są ważniejsze niż preferencje szkół (preferencje szkół są pośrednio uwzględnione w warunku stabilności).

Definicja 8. Mówimy, że przydział $f: K \to S$ jest nie gorszy od przydziału $g: K \to S$, jeśli dla dowolnego kandydata $k_i \in K$ spełniony jest warunek

$$f(k_i)P(k_i)g(k_i) \quad \text{lub} \quad f(k_i) = g(k_i).$$

Podany warunek oznacza, że szkoła, w której znalazł się kandydat k_i w wyniku przydziału f jest nie gorsza od szkoły, w której znalazł się on w wyniku przydziału g.

Definicja 9. Mówimy, że przydział stabilny $f: K \to S$ jest optymalny, jeśli jest nie gorszy od każdego innego przydziału stabilnego.

Zauważmy, że wprowadzone pojęcie optymalności (analogiczne do pojęcia wprowadzonego w pracy [4]) dotyczy tylko przydziałów stabilnych. Zauważmy też, że jest ono silniejsze od standardowego pojęcia Pareto-optymalności.

Definicja 9 gwarantuje istnienie co najwyżej jednego przydziału optymalnego. Gdyby bowiem istniały dwa przydziały optymalne f i g, wtedy f byłby nie gorszy od g i jednocześnie g byłby nie gorszy od f. Ponieważ relacje preferencji kandydatów są ostrymi porządkami, wynikałoby stąd, że $f = g$.

4. Istnienie przydziału optymalnego

Gale i Shapley udowodnili, że w przypadku sztywnych limitów q_j zawsze istnieje dokładnie jeden przydział optymalny. Przydział ten można otrzymać w wyniku działania algorytmu opisanego w pracy [4]. Uogólnimy teraz wynik Gale'a–Shapleya udowadniając, że dla dowolnych funkcji odrzuceń spełniających warunki addytywności, niezależności i asymetrii, uogólniony algorytm Gale'a–Shapleya (przedstawiony poniżej) prowadzi zawsze do rozwiązania optymalnego (będzie to oczywiście, na mocy definicji 9, jedyne rozwiązanie optymalne).

Zakładamy, że dana jest sytuacja (K, S, P, O). Uogólniony algorytm Gale'a–Shapleya (będziemy go nazywać algorytmem UGS) działa następująco:

Krok 0. Podstawiamy $k := 1$, $P_1 := P$.

Krok *k*. Tworzymy funkcję $f_k : K \to S$, przydzielając każdego kandydata do szkoły, która znajduje się na pierwszym miejscu jego listy preferencji (przy danych preferencjach P_k). Funkcję f_k nazywamy k-tym próbnym przydziałem (f_k nie musi być przydziałem w sensie definicji 6).

1. Jeśli dla każdej szkoły s_j spełniony jest warunek $O_j(f_k^{-1}(s_j)) = \varnothing$, to **stop.** Funkcja f_k jest już przydziałem w sensie definicji 6 i traktujemy ten przydział jako końcowy przydział kandydatów do szkół.

2. Jeśli istnieje j takie, że $O_j(f_k^{-1}(s_j)) \neq \varnothing$, to zmieniamy preferencje wszystkich kandydatów w zbiorze

$$\bigcup_j O_j(f_k^{-1}(s_j)).$$

$(O_j(f_k^{-1}(s_j))$ jest zbiorem wszystkich kandydatów odrzuconych przez szkołę s_j w kroku k). Zmiana następuje przez usunięcie z list preferencji tych kandydatów szkoły, która znajduje się na pierwszym miejscu każdej listy (czyli kandydatom ze zbioru $O_j(f_k^{-1}(s_j))$ usuwamy szkołę s_j z ich list preferencji). Nowe preferencje (z uwzględnieniem niezmienionych preferencji kandydatów przyjętych przez szkoły przy przydziale f_k) oznaczamy przez P_{k+1}.

3. Przechodzimy do kroku $k + 1$ z preferencjami P_{k+1}.

Twierdzenie 1. W dowolnej sytuacji (K, S, P, O) algorytm UGS wyznacza przydział kandydatów po skończonej liczbie kroków.

Dowód. W każdym kroku algorytmu odrzucana jest pewna liczba kandydatów. Ponieważ każdy z kandydatów może być przez daną szkołę odrzucony tylko raz, więc liczba wszystkich możliwych odrzuceń (poszczególnych kandydatów przez poszczególne szkoły) jest skończona. Wynika stąd, że w whichś z kroków algorytmu nikt nie jest odrzucony, a więc algorytm się kończy. Inaczej: niech r_i oznacza liczbę szkół znajdujących się na liście preferencji kandydata k_i (oprócz s_0). Kandydat k_i może więc być odrzucony co najwyżej r_i razy (każda szkoła odrzuca go co najwyżej raz). Jeśli w k-tym kroku odrzuconych jest t_k kandydatów, to

$$\sum_{k=1}^{\infty} t_k \leq r_1 + r_2 + ... + r_n.$$

Stąd wynika, że dla pewnego k, $t_k = 0$, a więc algorytm kończy się po s krokach, gdzie $s = \min\{k : t_k = 0\}$.

Do udowodnienia następnych dwóch twierdzeń potrzebne będą dwa techniczne lematy (lemat 1 będzie wykorzystany w dowodzie twierdzenia 2, a lemat 2 w dowodzie twierdzenia 3).

Lemat 1. Niech L_t oznacza zbiór kandydatów, którzy w kroku t algorytmu UGS mają szkołę s_j na pierwszym miejscu swojej listy preferencji. Załóżmy, że funkcja O_j spełnia warunek addytywności. Wówczas dla dowolnych liczb k i s, dla których zbiory $L_k, L_{k+1}, ..., L_{k+s}$ są określone, zachodzi

$$O_j(L_k \cup L_{k+1} \cup ... \cup L_{k+s}) = O_j(L_k) \cup O_j(L_{k+1}) \cup ... \cup O_j(L_{k+s}). \tag{5}$$

Dowód. Przeprowadzimy dowód indukcyjny względem s. Dla $s = 0$ (5) jest oczywiście prawdziwe. Załóżmy, że jest to prawda dla jakiegoś $s \geq 0$ i że określony jest zbiór L_{k+s+1} (tzn. że algorytm UGS jest realizowany w co najmniej $k + s + 1$ krokach). Zauważmy, że

$$L_k \cup L_{k+1} \cup ... \cup L_{k+s} \setminus [O_j(L_k) \cup ... \cup O_j(L_{k+s})] \subset L_{k+s+1}. \tag{6}$$

Jeśli bowiem jakiś kandydat ma szkołę s_j na pierwszym miejscu swojej listy preferencji w kroku $k+u$ i nie zostaje przez tę szkołę odrzucony ani w kroku $k+u$, ani w następnych krokach (aż do $k+s$), to w kroku $k+s+1$ w dalszym ciągu ma ją na pierwszym miejscu swojej listy preferencji.

Ze wzoru (6) oraz z założenia indukcyjnego (5) wynika, że

$$L_k \cup L_{k+1} \cup ... \cup L_{k+s} \setminus [O_j(L_k \cup L_{k+1} \cup ... \cup L_{k+s})] \subset L_{k+s+1}.$$

Z kolei z warunku addytywności (2) i z założenia indukcyjnego (5) wynika, że

$$O_j(L_k \cup L_{k+1} \cup ... \cup L_{k+s} \cup L_{k+s+1}) = O_j(L_k \cup L_{k+1} \cup ... \cup L_{k+s}) \cup O_j(L_{k+s+1}) =$$

$$= O_j(L_k) \cup O_j(L_{k+1}) \cup ... \cup O_j(L_{k+s}) \cup O_j(L_{k+s+1}).$$

Otrzymaliśmy więc warunek (5) dla $s+1$, co kończy dowód lematu 1.

□

Lemat 2. Załóżmy, że wszystkie funkcje odrzuceń spełniają warunki monotoniczności, niezależności i asymetrii. Załóżmy też, że kandydat $k_i \in K$ został odrzucony przez szkołę $s_j \in S$ w kroku t algorytmu UGS. Wówczas nie istnieje przydział stabilny, przy którym k_i zostanie przyjęty przez szkołę s_j (tzn. nie istnieje przydział stabilny $f: K \to S$ taki, że $f(k_i) = s_j$).

Dowód. Zastosujemy indukcję. Dowód prowadzimy jednocześnie dla przypadków, gdy $t = 1$ oraz $t > 1$ (w drugim przypadku zakładamy, że lemat jest prawdziwy dla kroków $1, 2, ..., t-1$). Niech L będzie zbiorem kandydatów, którzy zgłosili się do szkoły s_j w kroku t algorytmu UGS (tzn. mają szkołę s_j na pierwszym miejscu swojej listy preferencji). Mamy $L = P \cup O$, gdzie P jest zbiorem kandydatów przyjętych do szkoły s_j w kroku t, a O zbiorem kandydatów odrzuconych (tzn. $O = O_j(f_t^{-1}(s_j))$). Z założenia $k_i \in O$. Przyjmijmy $M = O \setminus \{k_i\}$. Ponieważ $M \subset O$, więc korzystając z warunku niezależności (3) otrzymujemy:

$$O \setminus M = \{k_i\} \subset O_j(L \setminus M) = O_j(P \cup \{k_i\}),$$

stąd

$$k_i \in O_j(P \cup \{k_i\}). \tag{7}$$

Szkoła s_j odrzuca więc kandydata k_i nie tylko ze zbioru L, ale również ze zbioru $P \cup \{k_i\}$. Udowodnimy, że przy dowolnym przydziale f, do szkoły s_j nie mogą być jednocześnie przyjęci wszyscy kandydaci ze zbioru P i kandydat k_i. Gdyby bowiem tak było, mielibyśmy wówczas

$$P \cup \{k_i\} \subset f^{-1}(s_j), \tag{8}$$

a z monotoniczności funkcji O_j i z warunku (7) otrzymalibyśmy

$$k_i \in O_j(P \cup \{k_i\}) \subset O_j(f^{-1}(s_j)),$$

co jest sprzeczne z warunkiem drugim w definicji 6.

Załóżmy, że f jest przydziałem stabilnym, przy którym kandydat k_i zostaje przyjęty przez szkołę s_j. Ponieważ (8) nie może być prawdą, istnieje więc kandydat, oznaczmy go przez k_l, który należy do zbioru P i nie zostaje przyjęty, przy przydziale f, przez szkołę s_j (tzn. $k_l \notin f^{-1}(s_j)$). Udowodnimy, że k_l, przy przydziale f, nie może zostać przyjęty również przez żadną szkołę lepszą (z punktu widzenia jego preferencji) od szkoły s_j. Jeśli $t = 1$, to jest to oczywiste, bo $k_l \in P$, czyli szkoła s_j jest na pierwszym miejscu początkowej listy preferencji kandydata k_l. Załóżmy, że $t > 1$ i kandydat k_l zostanie przyjęty, przy przydziale f, przez szkołę lepszą od s_j – niech to będzie szkoła s_p. Ponieważ $k_l \in P$, więc k_l został przyjęty, w kroku t algorytmu UGS, do szkoły s_j. Musiał więc być odrzucony przez szkołę s_p w którymś z kroków $1, 2, ..., t-1$. Na mocy indukcji nie istnieje przydział stabilny, przy którym k_l zostanie przyjęty przez s_p. W szczególności nie zostanie on przyjęty do s_p przy przydziale f.

Wynika stąd, że k_l zostanie przyjęty, przy przydziale f, do szkoły s_p – gorszej od s_j. Przydział f nie może więc być stabilny, ponieważ przy tym przydziale kandydat k_i zostaje przyjęty do s_j, kandydat k_l – do s_p, s_j jest lepsza od s_p dla k_l oraz $\sim (k_i >_j k_l)$ (bo $k_l \in P,\ \ k_i \in O$, stąd $k_l >_j k_i$, a więc na mocy asymetrii $\sim (k_i >_j k_l)$).

□

Twierdzenie 2. Jeśli wszystkie funkcje odrzuceń O_j spełniają warunek addytywności (2), to przydział wyznaczony przez algorytm UGS jest stabilny.

Dowód. Załóżmy, że f jest przydziałem wyznaczonym przez algorytm UGS. Rozważmy dowolnych kandydatów k_i i k_l oraz szkoły s_j i s_p takie, że $f(k_i) = s_j$, $f(k_l) = s_p$ i kandydat k_l woli s_j od s_p. Udowodnimy, że istnieje zbiór L taki, że $k_i, k_l \in L$, $k_i \notin O_j(L)$, $k_l \in O_j(L)$ (czyli $k_i >_j k_l$). Będzie to znaczyło, że niemożliwe jest jednoczesne spełnienie warunków 1–4 z definicji 7, a więc, że przydział f jest stabilny.

Niech L_t oznacza zbiór taki jak w lemacie 1, tzn. zbiór kandydatów, którzy w kroku t algorytmu mają szkołę s_j na pierwszym miejscu swojej listy preferencji. Ponieważ kandydat k_i w wyniku działania algorytmu UGS zostaje przyjęty przez szkołę s_j, muszą być więc spełnione warunki:

a) $\exists_r \forall_{t \geq r},\ k_i \in L_t$,

b) $\forall_t,\ k_i \notin O_j(L_t)$.

Inaczej mówiąc, kandydat k_i ma zawsze, począwszy od pewnego kroku r, szkołę s_j na pierwszym miejscu swojej listy preferencji oraz w żadnym kroku nie zostaje on odrzucony przez szkołę s_j.

Z kolei kandydat k_l zostaje przyjęty przez szkołę s_p, chociaż woli od niej szkołę s_j, a więc w którymś kroku algorytmu, powiedzmy w kroku k, zostaje on odrzucony przez szkołę s_j. Stąd

$$k_l \in O_j(L_k)\,. \tag{9}$$

Kandydat k_i nie musi należeć do L_k, ale z warunku a) wynika, że należy do któregoś ze zbiorów L_t dla $t \geq k$. Niech $s_0 \geq 0$ będzie najmniejszą liczbą taką, że

$$k_i \in L_{k+s_0}\,. \tag{10}$$

Z warunku (10) wynika, że

$$k_i \in L_k \cup L_{k+1} \cup \ldots \cup L_{k+s_0}\,, \tag{11}$$

a z (9) i z monotoniczności funkcji O_j wynika, że

$$k_l \in O_j(L_k \cup L_{k+1} \cup \ldots \cup L_{k+s_0})\,. \tag{12}$$

Z kolei na podstawie warunku b) oraz lematu 1 mamy

$$k_i \notin O_j(L_k) \cup O_j(L_{k+1}) \cup \ldots \cup O_j(L_{k+s_0}) = O_j(L_k \cup L_{k+1} \cup \ldots \cup L_{k+s_0})\,. \tag{13}$$

Jeśli więc $L = L_k \cup L_{k+1} \cup \ldots \cup L_{k+s_0}$, to na podstawie (11), (12) i (13) mamy

$$k_i, k_l \in L, \quad k_i \notin O_j(L), \quad k_l \in O_j(L)\,,$$

stąd $k_i >_j k_l$, a więc warunek 4 w definicji 7 nie jest spełniony, czyli przydział f jest stabilny.

□

Następne twierdzenie określa warunki, przy których algorytm UGS daje rozwiązanie optymalne.

Twierdzenie 3. Jeśli wszystkie funkcje odrzuceń O_j spełniają warunki monotoniczności, niezależności i asymetrii, to przydział otrzymany za pomocą algorytmu UGS jest nie gorszy od dowolnego przydziału stabilnego.

Dowód. Załóżmy, że w wyniku działania algorytmu UGS kandydat k_i został przyjęty do szkoły s_j. Jeśli szkoła s_p jest lepsza od s_j dla kandydata k_i, to w którymś z kroków algorytmu odrzuciła ona kandydata k_i, a więc – na mocy lematu 2 – w żadnym przydziale stabilnym kandydat k_i nie może zostać przyjęty przez szkołę s_p. Wynika stąd, że w każdym przydziale stabilnym kandydat k_i zostanie przyjęty albo do szkoły s_j, albo do szkoły gorszej od s_j, a więc przydział taki jest na pewno gorszy lub co najwyżej tak samo dobry jak przydział otrzymany w wyniku działania algorytmu UGS.

□

Jako wniosek z twierdzeń 2 i 3 otrzymujemy następujące końcowe twierdzenie:

Twierdzenie 4. Jeśli wszystkie funkcje odrzuceń spełniają warunki addytywności, niezależności i asymetrii, to przydział otrzymany za pomocą algorytmu UGS jest optymalny.

5. Uwagi końcowe

Udowodniliśmy, że uogólniony algorytm Gale'a–Shapleya, w którym wykorzystujemy funkcje odrzuceń spełniające trzy warunki: addytywności, niezależności i asymetrii, zawsze prowadzi do optymalnego przydziału kandydatów do szkół.

Pojawia się wiele pytań związanych z poruszaną problematyką: Jakie rodzaje funkcji odrzuceń (oprócz funkcji wyznaczonych przez sztywne i „miękkie" limity przyjęć) odpowiadają kryteriom przyjęć stosowanym w praktyce i czy spełniają one podane w pracy warunki (a więc w jakich przypadkach w praktyce może być stosowany algorytm UGS)? Czy podane warunki są niezależne (czy np. któryś z nich nie wynika z innego)? Czy możliwe są inne układy warunków dla funkcji odrzuceń, gwarantujące poprawne działanie algorytmu UGS (tzn. gwarantujące, że algorytm ten prowadzi do rozwiązania optymalnego)? Czy podane warunki są konieczne, czy tylko wystarczające dla poprawnego działania algorytmu UGS? Udzielenie (chociażby częściowej) odpowiedzi na te pytania może ułatwić analizę i optymalizację funkcjonujących i projektowanych systemów rekrutacji kandydatów do szkół lub innych podobnych systemów (np. systemów rekrutacji pracowników do firm).

Bibliografia

[1] ALKAN A., GALE D., *Stable schedule matching under revealed preference*, Journal of Economic Theory, 2003, nr 112, s. 289–306.

[2] BALINSKI M., SÖNMEZ T., *A Tale of Two Mechanisms: Student Placement*, Journal of Economic Theory, 1999, nr 84, s. 73–94.

[3] EHLERS L., *Monotonic and implementable solutions in generalized matching problems*, Journal of Economic Theory, 2004, nr 114, s. 358–369.

[4] GALE D., SHAPLEY S., *College admissions and the stability of marriage*, American Mathematical Monthly, 1962, nr 69, s. 9–15.

[5] PAWŁOWSKI J., *Żeby w wyniku naboru nikt nie poczuł się „nabrany". Rodzicielskie refleksje po egzaminach do szkół średnich*, Informatyka w szkole – Biuletyn Informacyjny, 31(2000), (www.vulcan.edu.pl/biuletyn).

Optimal recruitment system of candidates to schools

We generalize a well-known Gale–Shapley algorithm [4] concerning optimal assignment of candidates to schools. In the classical Gale–Shapley model we consider a set of schools (colleges) S, a set of candidates K, candidates' preferences in S and schools' preferences in the set K (represented by strict linear orders). We assume that each school has a quota q, i.e. q, is the maximal number of candidates which it can admit. We want to assign candidates to schools in such a way that some condition of stability (defined in [4]) is satisfied. In our generalized model schools' preferences are represented by the so-called "rejection functions". We introduce a generalized stability condition and formulate conditions under which the generalized G–S algorithm leads to stable and optimal assignments. Our results can be applied in practice, e.g., they can help in constructing computerized recruitment systems, in which we want to incorporate "soft" quotas and ties between candidates.

Keywords: *recruitment system, two-sided matching problem, Gale–Shapley algorithm*